Технологии и методики обучения выпускников решению сложных задач при подготовке к ЕГЭ по математике в 2026 году (профильный уровень)

Геометрические задачи

Кормачева Елена Владимировна,

учитель математики МБОУ «ЦО – гимназия № 11 им. Александра и Олега Трояновских»,

эксперт региональной предметной комиссии для проверки ответов участников ГИА-11 по математике (профильный уровень)

Задание № 17

- Задание №17 на ЕГЭ по профильной математике связано с решением задач на геометрическую интерпретацию и использование свойств фигур в планиметрии. Оно проверяет умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, а также геометрические отношения; находить и вычислять геометрические величины (длину, угол, площадь), используя изученные формулы и методы. Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 3.
- В 2024-2025 учебном году задание верно выполнили чуть меньше 10 % участников экзамена.

Основные методы решения геометрических задач

1. Метод дополнительных построений
2. Метод геометрических преобразований
3. Метод подобия
4. Метод площадей
5. Метод вспомогательной окружности
6. Метод геометрического видения
7. Метод координат
8. Векторный метод

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и получен обоснованно верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

ЕГЭ № 17 (2025)

Задача № 1

В четырёхугольник KLMN вписана окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.

б) Найдите длину стороны MN, если LA = 1.

Задача № 2

В параллелограмме ABCD с острым углом BAD из вершины B проведены высоты BP и BQ, причём точка P лежит на стороне AD, а точка Q — на стороне CD. На стороне AD отмечена точка M. Известно, что AM = BP, AB = BQ.

а) Докажите, что BM = PQ.

б) Найдите площадь треугольника APQ, если AM = BP = 8,

AB = BQ =10

Задача № 3

В остроугольном треугольнике ABC $\angle BAC$ в два раза больше $\angle ABC$. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AOC, пересекает отрезок BC в точках C и P.

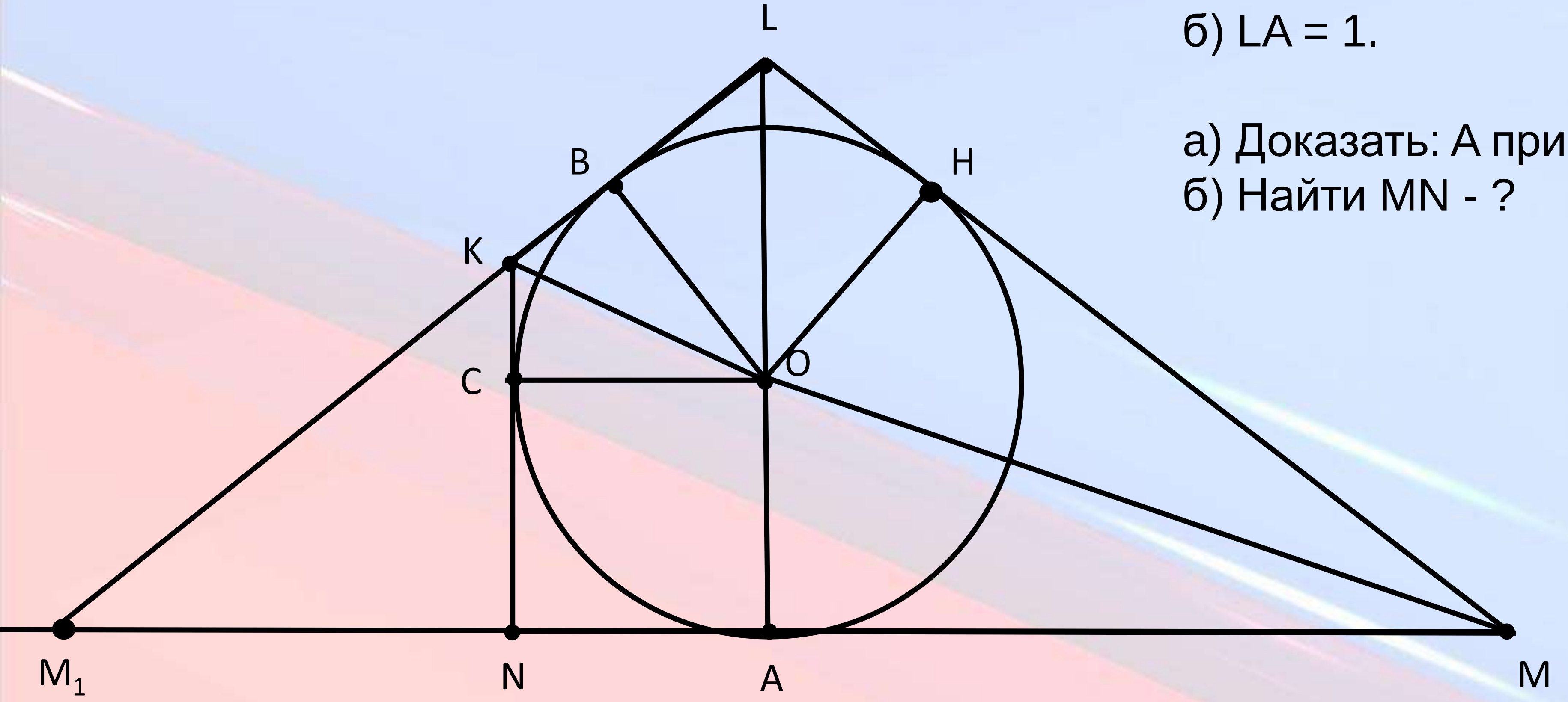
а) Докажите, что AP = BP.

б) Найдите длину стороны BC, если AB = 7, AC = 4.

ЕГЭ № 17 (2025)

Дано: четырёхугольник KLMN,
Окр (O;r) – вписанная в KLMN,
Окр (O;r) пересекает MN в т.A,
$\angle MNK = 90^\circ$
$\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$
б) LA = 1.

а) Доказать: A принадлежит LO
б) Найти MN - ?



Решение

а) Рассмотрим четырёхугольник KLMN – выпуклый, по Т. о сумме углов выпуклого четырёхугольника
$\angle MNK + \angle LMN + \angle MLK + \angle LKN = 360^\circ$
$\angle LMN = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 30^\circ$.
Пусть LO пересекает MN в т. A_1.
Тогда $\angle MLA_1 = 60^\circ$ (LO – биссектриса $\angle MLK$)
Рассмотрим треугольник MLA_1:
$\angle MA_1L = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.
Значит OA_1 □ MN и OA □ MN (радиус, проведенный в точке касания).
Но из т., не лежащей на прямой, можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой.
Следовательно, $A_1 = A$ и A лежит на LO.

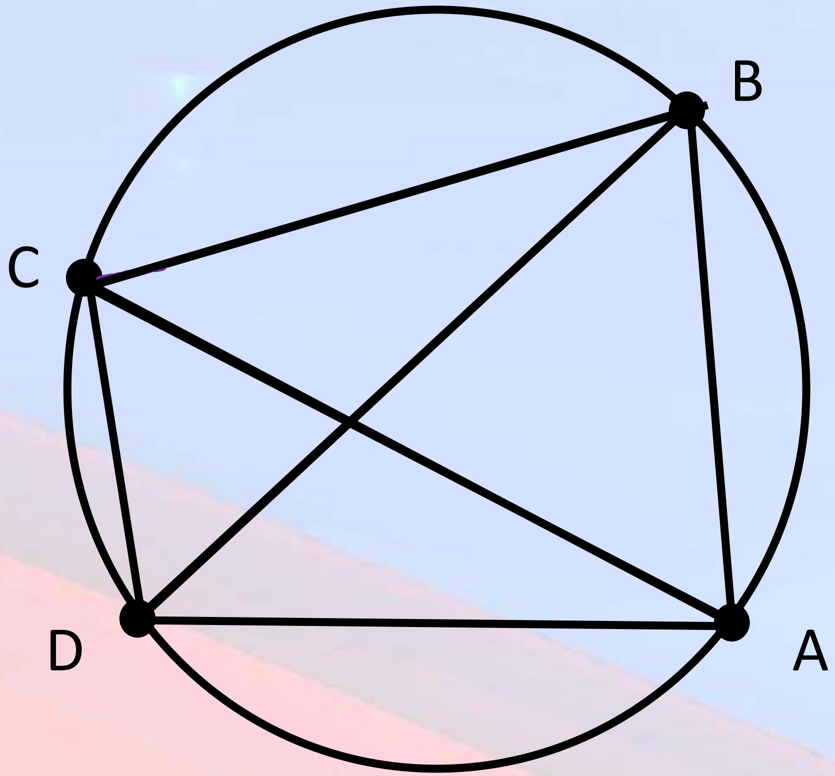
а) Рассмотрим четырёхугольник LMAO по Т. о сумме углов выпуклого четырёхугольника.
$\angle OAM = 90^\circ$ (радиус, проведенный в точку касания)
$\angle OLM = 60^\circ$ (центр вписанной окр. – пересечение биссектрис)
$\angle AML = 30^\circ$ (по выше док.) след.,
$\angle LOA = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 180^\circ$ след.,
$\angle LOA$ - развернутый
A принадлежит LO. чтд

б) Дополнительное построение: LK пересекает MN в точке M_1, $OC \perp KN$.
Рассмотрим треугольник LAM – прямоугольный,
$\angle LMA = 30^\circ$, след., LM = 2 LA = 2, AM = LMcos 30° = $\sqrt{3}$
Рассмотрим треугольник LM_1M:
$LA \perp M_1M$, $\angle ALM_1 = \angle ALM$.
Тогда треугольник LM_1M – равнобедренный, $M_1L=ML=2$, $MM_1=2AM=2\sqrt{3}$.
$S = \frac{1}{2}LA\cdot MM_1=\frac{1}{2}P\cdot r$
$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}+4\right)r$
$r = 2\sqrt{3}-3$
Рассмотрим CNAO – квадрат
$NA = r = 2\sqrt{3}-3$
NM = NA+AM
$NM = 2\sqrt{3}-3+\sqrt{3} = 3\sqrt{3}-3$
Ответ: $NM = 3\sqrt{3}-3$

Причины ошибок в решении геометрических задач

- Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем, а также методов решения задач
- Неумение их применять (в том числе, применять их неверно)
- Невнимательное чтение условия и вопроса задания
- Вычислительные ошибки
- Нарушение логики в рассуждениях
- Принятие ошибочных гипотез
- Недостатки в работе с чертежом

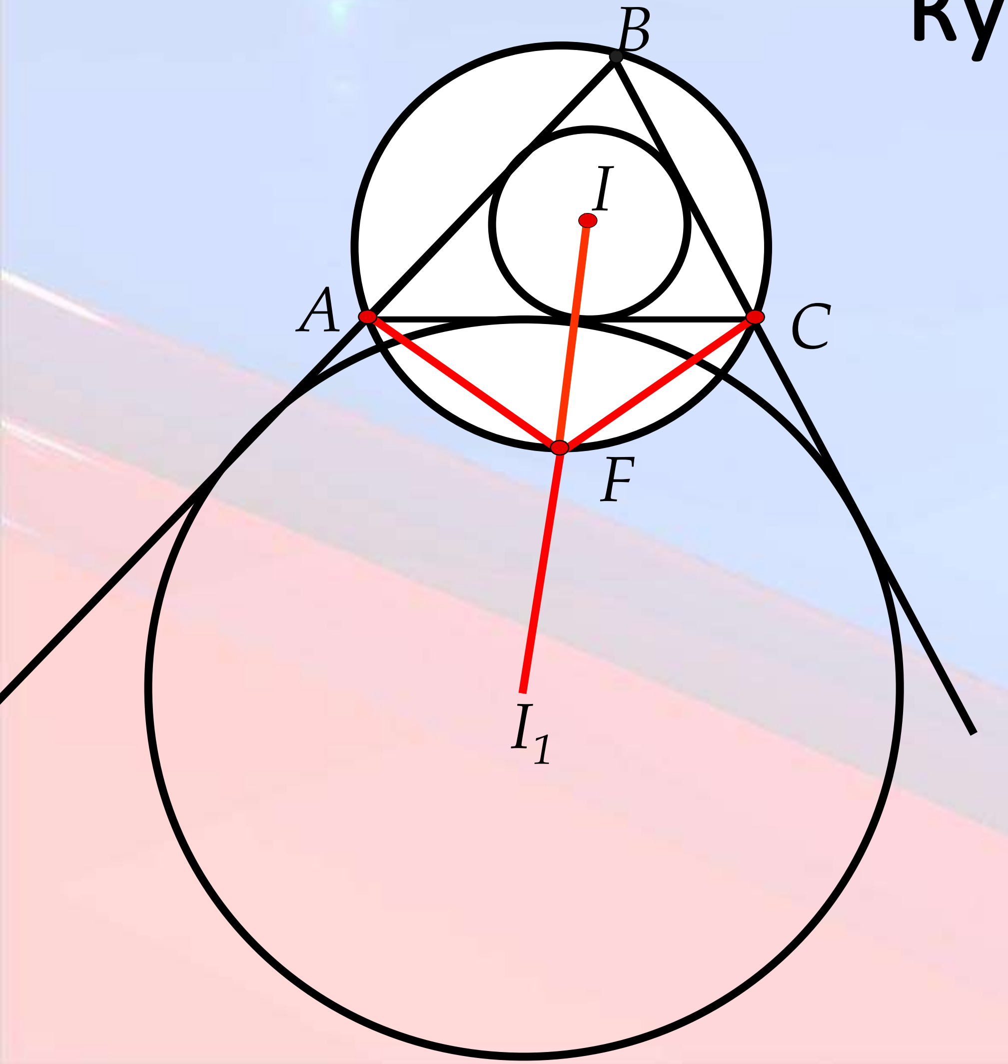
Теорема Птолемея



$AC \bullet BD = AB \bullet CD + AD \bullet BC$

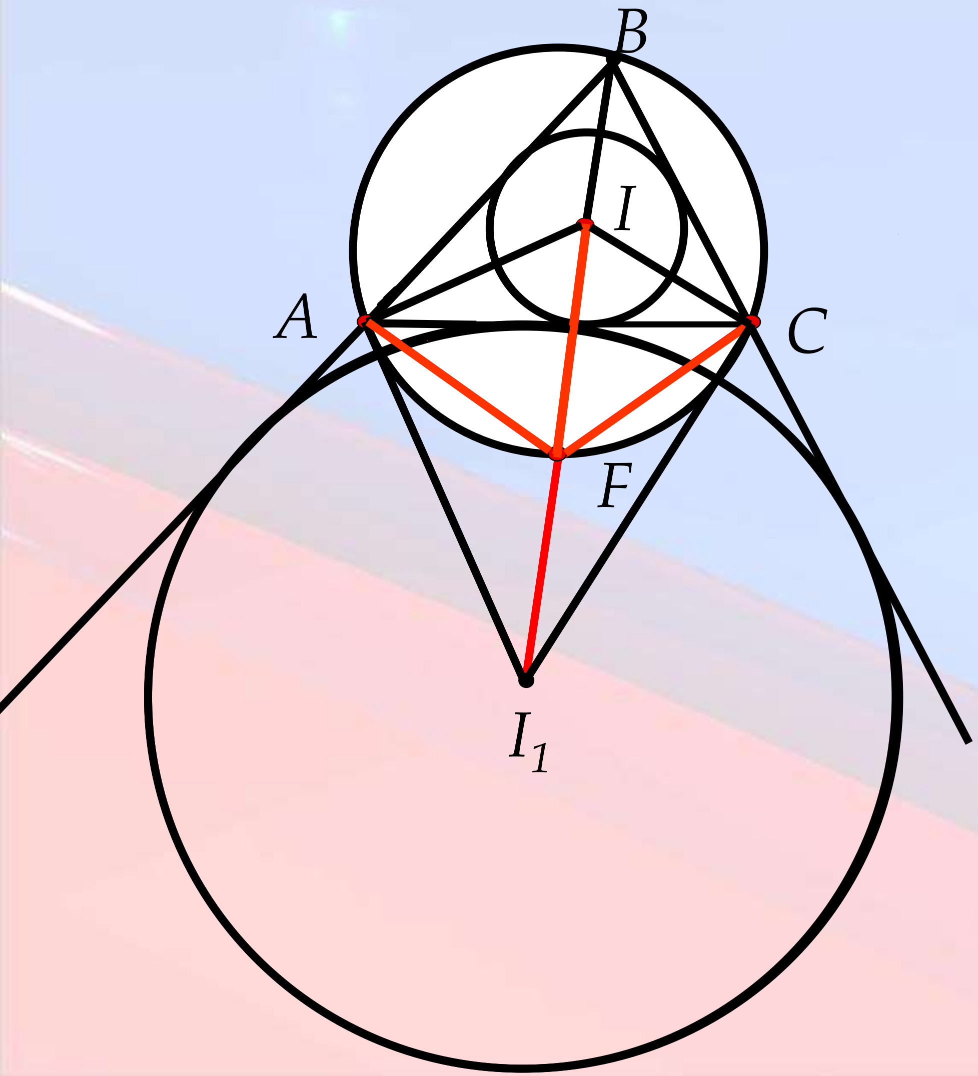
Во всяком выпуклом четырёхугольнике, вписанном в окружность, произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин его противоположных сторон.

Теорема Мансиона (также известна как лемма о трезубце, лемма о трилистнике или лемма о куриной лапке)



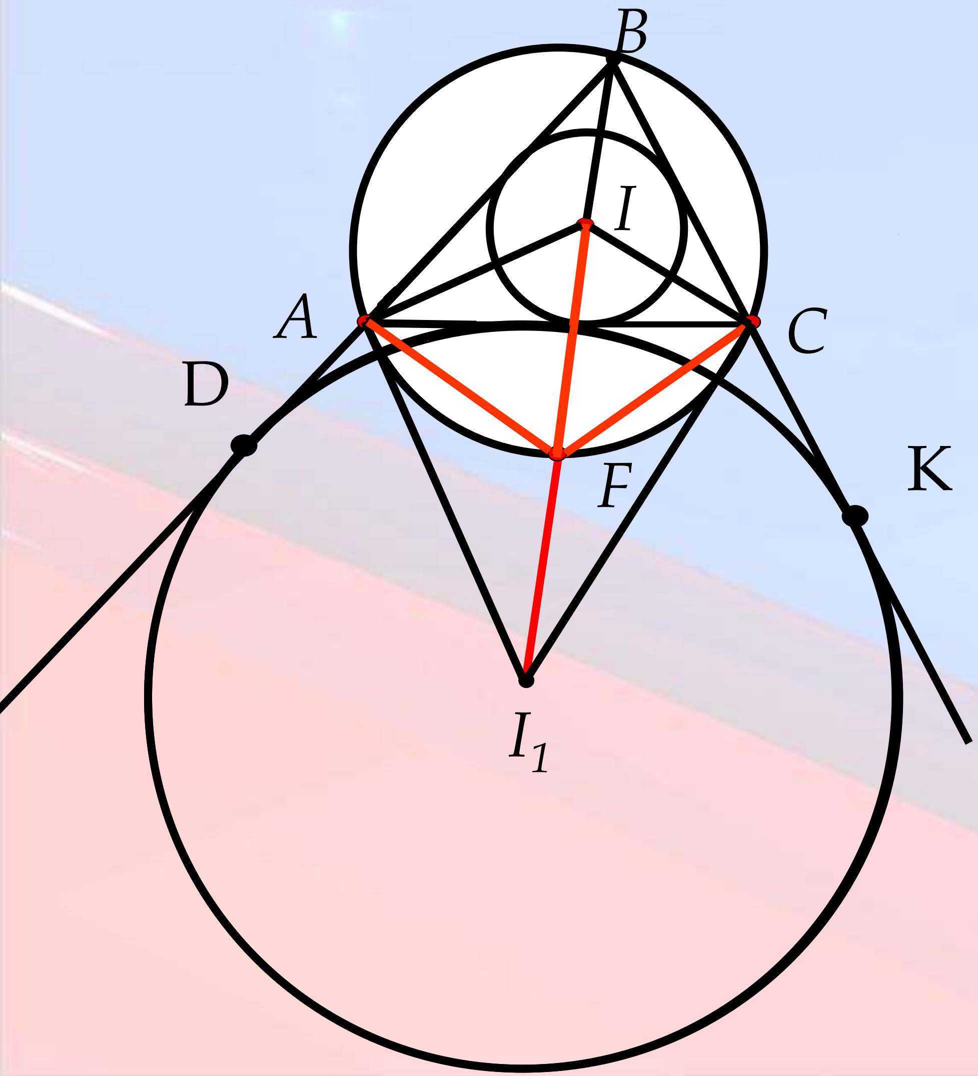
Дан треугольник *ABC*:
точка *I* — центр вписанной окружности, точка I_1 — центр вневписанной окружности, а точка *F* — точка пересечения отрезка II_1 с дугой окружности, описанной около треугольника.
Тогда: точка *F* равноудалена от точек *I*, I_1, *A и C*.

Доказательство теоремы Мансиона



∠ABF = ∠ACF(опираются на одну дугу)
∠CBF = ∠CAF(опираются на одну дугу)
BF – биссектриса ∠B
∠ABF = ∠CBF = ∠CAF = ∠ACF = α
∆AFC - равнобедренный
AF = CF
AI и CI - биссектрисы, тогда
∠BAI = β тогда
∠AIF = α + β(внешний ∆ABI)
∠IAF = α + β значит
∆ AFI - равнобедренный след.,
AF = FI = FC

Доказательство теоремы Мансиона



I принадлежит BF, $\angle DAI_1 = \angle I_1AC$

$\angle KCI_1 = \angle I_1CA$

$\angle IAI_1 = \angle ICI_1 = 90^\circ$ (биссектрисы смежных углов)

Рассмотрим четырёхугольник $AICI_1$ - выпуклый

$\angle IAI_1 + \angle I_1CI = \angle AI_1C + \angle AIC = 180^\circ$ след.,

около $AICI_1$ можно описать окружность

AF = FC = FI = R, F - центр описанной окружности

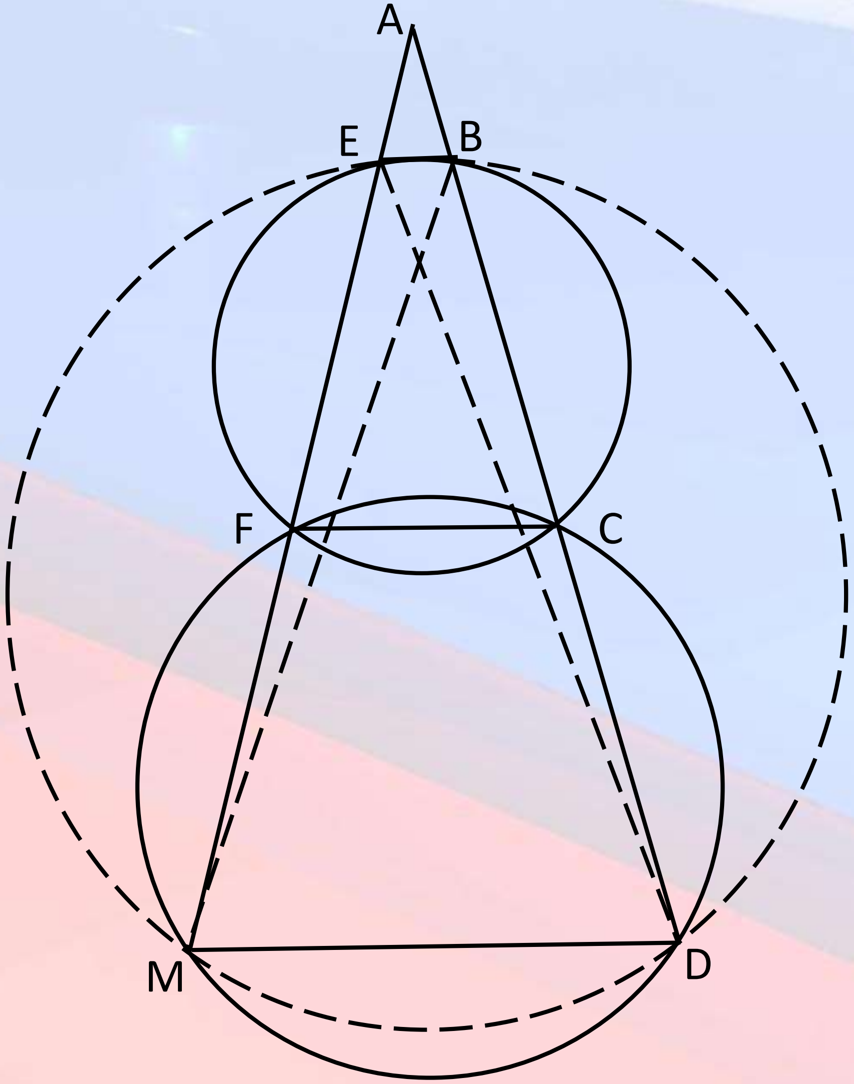
около четырехугольника $AICI_1$,тогда

FI_1= R след.,

$AF = FC = FI = FI_1$

чтд

Пример использования Теоремы Птолемея в ЕГЭ



Две окружности разных радиусов пересекаются в точках F и C, причем их центры лежат по разные стороны от хорды FC. Вне обеих окружностей взята точка A, лежащая по ту же сторону от хорды FC, что и центр меньшей окружности.
Прямая AC пересекает меньшую окружность в точках C и B,а большую — в точках C и D. Прямая AF пересекает меньшую окружность в точках F и E, а большую — в точках F и M.

а) Докажите, что $AE \cdot AD = AB \cdot AM$.

б) Найдите сумму произведений длин противоположных сторон четырехугольника EBDM, если $\angle FMD = \angle EBA$ и $MB \cdot ED = 1234$.

Решение

а) Рассмотрим EBCF и FCDM - вписаннные четырёх угольники след.,
$\angle BEF = \angle BCF = 180^\circ$
$\angle EBC = \angle CFE = 180^\circ$
$\angle CFM = \angle CDM = 180^\circ$
$\angle FCD = \angle FMD = 180^\circ$
Рассмотрим $\angle CBE$ и $\angle EBA$ - смежные по свойству о смежных углах
$\angle CBE + \angle EBA = 180^\circ$ след., т.к.
$\angle CFE + \angle EBC = 180^\circ$ по выше доказанному след.,
$\angle CFE = \angle EBA$
Рассмотрим $\angle$ MFC и $\angle$ EFC - смежные след., по свойству смежных углов
$\angle MFC + \angle EFC = 180^\circ$ след., т.к.
$\angle MFC + \angle CDM = 180^\circ$ по выше доказанному след.,
$\angle EFC = \angle CDM = \angle EBA$

- Рассмотрим ΔEAB и ΔMAD
- $\angle A$ - общий
- $\angle EBA = \angle ADM$ по выше доказанному след.,
- ΔEAB подобен ΔMAD (по двум углам) след.,

$$\frac{AE}{AM} = \frac{AB}{AD} = \frac{EB}{MD}$$

- AE•AD=AB•AM

Решение

б)Рассмотрим прямые EB и MD и AD - секущую

∠ABE = ∠CDM, ∠ABE и ∠CDM – соответственные, след., EB II MD – по признаку параллельных прямых

Рассмотрим четырёхугольник EBDM:

EB II MD, ME пересекается с BD в т.А, тогда

EBDM - трапеция по определению.

∠FMD = ∠EBA по условию

∠EBA = ∠CDM по выше доказанному след.,

EBDM – равнобедренная трапеция,

тогда около EBDM можно описать окружность.

По Т Птолемея:

MB • ED = EB • MD + EM • BD = 1234

Ответ: EB • MD + EM • BD = 1234

Вспомогательные утверждения для решения задач

1. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
2. Свойство медианы прямоугольного треугольника.
3. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма.
4. Площадь выпуклого четырехугольника.
5. Свойства трапеции: отрезок, соединяющий середины диагоналей.
6. Свойства равнобедренной трапеции.
7. Замечательное свойство трапеции.
8. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
9. Свойства биссектрис треугольника.
10. Свойства медиан треугольника.
11. Свойство высот треугольника.

Окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
2. Теорема о пересекающихся хордах.
3. Теорема о серединном перпендикуляре к хорде.
4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

Вспомогательные утверждения для решения задач

5. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

6. Угол между касательной и хордой.

7. Теорема о секущей и касательной.

8. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

9. Угол между двумя секущими (с вершиной вне окружности) равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

10. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, равен $\frac{1}{2}$ (a + b - c).

11. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

12. Если расстояние между центрами окружностей радиусами R и r, равно a и a > R + r, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно.

$\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ и $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$

13. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180^0.

Вспомогательные утверждения для решения задач

14. В четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

15. Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна её средней линии.

16. Если M — точка касания со стороной AC окружности, вписанной в треугольник ABC, то AM = p – BC, где p — полупериметр треугольника ABC.

17. Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC, то расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

18. Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L, M,а угол BAC равен φ, то угол KLM = $90^\circ \quad \frac{1}{2} \quad \varphi$.

19. Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S.

20. Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}$S.

21. Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон.

Основные факторы успеха

- Время (чем больше времени на подготовку, тем лучше)
- Система (работа по плану, а не от случая к случаю)
- Желание подготовиться

У каждого есть свой любимый способ обучения и любимый стиль работы

- Ученики-зрители (любят рассматривать)
- Ученики-слушатели (любят слушать)
- «Осязающие» ученики (учатся, находясь в движении)
- «Печатно-ориентированные» ученики (учатся читая)
- «Интерактивные» ученики (учатся взаимодействуя с другими)